К ВОПРОСУ ОБ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Л. Б. Гейлер

При разрешении задач из области автоматического регулирования, как известно, одним из наиболее существенных вопросов является определение условий устойчивости регулируемой системы. При этом в некоторых случаях особый интерес может представить выяснение условий или критерия апериодической устойчивости. Этому вопросу посвящён ряд работ [1—4], показывающих, что решение его в общей форме наталкивается на значительные трудности. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы все корни характеристического уравнения были вещественными и отрицательными, пока не найдены.

Однако *необходимые* для этого условия могут быть чрезвычайно просто сформулированы, если обратиться к одному незаслуженно забытому неравенству, доказанному около 200 лет тому назад Эйлером и опубликованному тогда же в Трудах Петербургской Академии наук, изд. 1765 г. [5].

Ввиду несомненного интереса и практического значения этого неравенства для теории автоматического регулирования, приведём здесь формулировку и доказательство этого неравенства. Допустим, что имеется характеристическое уравнение n-й степени:

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n = 0, \qquad (1)$$

у которого все коэффициенты действительны. Если все корни этого уравнения действительны, тогда, согласно Эйлеру, для любой группы, состоящей из трёх смежных членов этого уравнения, т. е.

$$c_{\nu-1}x^{\nu-1} + c_\nu x^\nu + c_{\nu+1}x^{\nu+1}$$

выполняется следующее неравенство для коэффициентов:

$$c_\nu^2 \geqslant \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\mu}\right)c_{\nu+1}c_{\nu-1},$$

где

$$\mu + \nu = n.$$

Доказательство неравенства Эйлера

Все производные многочлена

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad (1)$$

имеют только действительные корни, например, производная ν-го порядка:

$$\varphi = \nu!\, a_\nu + (\nu+1)!\, a_{\nu+1}x + \frac{(\nu+2)!}{2!}\, a_{\nu+2}x^2 + \ldots + \frac{n!}{\mu!}\, a_n x^\mu, \tag{2}$$

у которой мы предполагаем первые три коэффициента отличными от нуля. Если в функции φ, согласно равенству (2), заменить x на $\frac{1}{x}$ и полученную таким образом функцию ψ приравнять нулю, т. е.

$$\psi = \nu!\, a_\nu x^\mu + (\nu+1)!\, a_{\nu+1}x^{\mu-1} + \frac{(\nu+2)!}{2!}\, a_{\nu+2}x^{\mu-2} + \ldots + \frac{n!}{\mu!}\, a_n = 0, \tag{3}$$

то и она будет иметь только действительные корни. Точно так же действительными корнями будут обладать все дальнейшие производные более высокого порядка от ψ, например, предпоследняя производная (ограничиваясь производными, не равными тождественно постоянной):

$$\xi = \frac{\mu!\,\nu!}{2}\, a_\nu x^2 + (\mu-1)!\,(\nu+1)!\, a_{\nu+1}x + (\mu-2)!\,\frac{(\nu+2)!}{2}\, a_{\nu+2}. \tag{4}$$

Но если квадратное уравнение $\xi = 0$ имеет только действительные корни, то его дискриминант D должен быть больше нуля. Величина

$$D = [(\mu-1)!\,(\nu+1)!\, a_{\nu+1}]^2 - \mu!\,\nu!\,(\mu-2)!\,(\nu+2)!\, a_\nu a_{\nu+2} \tag{5}$$

и условие $D \geqslant 0$ напишется так:

$$(\mu-1)(\nu+1)a_{\nu+1}^2 \geqslant \mu(\nu+2)\, a_\nu a_{\nu+2}$$

или

$$(\mu-1)(\nu+1)\, c_{\mu-1}^2 \geqslant \mu(\nu+2)\, c_\mu c_{\mu-2}. \tag{6}$$

Положим здесь

$$\mu = 1 + r,\quad \nu = s - 1,\quad \text{так что}\quad r + s = \mu + \nu = n. \tag{7}$$

Тогда

$$c_r^2 \geqslant \left(1+\frac{1}{r}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right) c_{r+1}c_{r-1} \tag{8}$$

или, вводя вместо r и s снова ν и μ, причём $\mu + \nu = n$, получаем требуемое условие

$$c_\nu^2 \geqslant \left(1+\frac{1}{\mu}\right)\left(1+\frac{1}{\nu}\right) c_{\nu+1}c_{\nu-1}, \tag{9}$$

что и требовалось доказать.

Неравенство (9) может быть заменено более простым; так как и ν и μ всегда положительны, то

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{1}{\mu}\right) > 1$$

и тогда неравенство (9) переходит в следующее усиленное и более простое по форме:

$$c_\nu^2 > c_{\nu+1}c_{\nu-1} \tag{10}$$

Оно выражает собой теорему Де Гюа (Jean Paul de Gua, 1712—1786).

Несколько более сильное чем (10) (но тоже более слабое, чем основное неравенство Эйлера!) неравенство

$$c_\nu^2 > \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) c_{\nu+1}\, c_{\nu-1} \tag{11}$$

было найдено И. Шуром в 1914 году [6].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Гольдфарб, Условие апериодичности некоторых систем авторегулирования. Труды ВЭИ, № 8 (1940).

[2] А. В. Михайлов, Критерий апериодичности авторегулируемых систем. Автоматика и телемеханика, № 1 (1941).

[3] М. В. Мееров, Критерий апериодичности регулирования. Известия АН СССР, Отделение технических наук, № 12 (1945).

[4] Ю. Г. Корнилов и В. Д. Пивень, Основы теории автоматического регулирования (1947) (стр. 141 – 144, Апериодичность процесса регулирования).

[5] Труды С. Петербургской Академии наук, том XIII, изд. 1765 г. (Novi Commentarii Academiae Petropolitanae).

[6] J. Schur, Journ. für reine und angew. Math. (1914).